10.SINIF MATEMATİK DERS NOTLARI

MATEMATİK ÖĞRETMENİ
CÜNEYT TOPRAK

(10/A, 10/B, 10/C, 10/D, 10/E, 10/G)

TOPLAMA VE ÇARPMA YOLUYLA SAYMA

➢ Ayrık iki kümenin birleşiminin eleman sayısını bulmaya "toplama yoluyla sayma yöntemi" denir.

Örnek

Ali'nin farklı 4 pantolonu ve 3 gömleği vardır.

Buna göre, Ali bir pantolon veya bir gömleğini kaç farklı şekilde seçebilir?

ÇÖZÜM:

Ali'nin pantolonları P_1, P_2, P_3, P_4

Ali'nin gömlekleri G_1, G_2, G_3 olsun.

Ali bir pantolonu 4 şekilde, bir gömleği 3 şekilde seçebilir.

O halde, Ali bir pantolon veya bir gömleği

$4 + 3 = 7$ farklı şekilde seçer.

SORU:

Nur'un 5 farklı şalı ve 7 farklı şapkası vardır. Buna göre, Nur bir şal veya bir şapkayı kaç farklı şekilde seçebilir?

Nur bir şalı 5, bir şapkayı 7 farklı şekilde seçebilir. O halde bir şal veya bir şapkayı,

$5 + 7 = 12$

farklı şekilde seçebilir.

Örnek

4 farklı pantolon ve 3 farklı gömleği olan Murat bir pantolon ve bir gömleği kaç farklı şekilde seçebilir?

Çözüm

Pantolon ⇒ P_1 P_2 P_3 P_4

Gömlek ⇒ $G_1\ G_2\ G_3$ $G_1\ G_2\ G_3$ $G_1\ G_2\ G_3$ $G_1\ G_2\ G_3$

P_1G_1	P_2G_1	P_3G_1	P_4G_1
P_1G_2	P_2G_2	P_3G_2	P_4G_2
P_1G_3	P_2G_3	P_3G_3	P_4G_3

12 farklı durum

Bu durumda $4 . 3 = 12$ farklı şekilde seçebilir.

SORU:

Bir sınıfta 10 farklı sıra vardır ve her sırada 3 öğrenci oturmaktadır.

Buna göre, bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

Bir sırada 3 öğrenci oturduğuna göre, 10 sırada

$10 . 3 = 30$

öğrenci oturmaktadır.

SORU:

9 kız ve 5 erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıftan bir kız öğrenci ve bir erkek öğrenci kaç farklı şekilde seçilebilir?

Bir erkek öğrenci 5 farklı, bir kız öğrenci 9 farklı şekilde seçilebilir. O halde bir kız ve bir erkek öğrenci

$9 . 5 = 45$

farklı şekilde seçilebilir.

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

SORU:

Birbirinden farklı 3 fizik, 4 kimya ve 5 biyoloji kitabı arasından bir fizik, bir kimya ve bir biyoloji kitabı kaç farklı şekilde seçilebilir?

Bir fizik kitabı 3, bir kimya kitabı 4, bir biyoloji kitabı 5 farklı şekilde seçilebilir. O halde bir fizik, bir kimya ve bir biyoloji kitabı

$3.4.5 = 60$

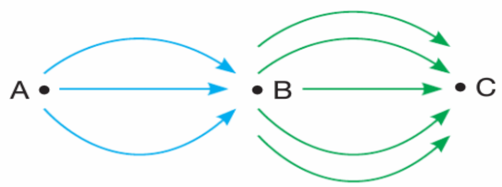
farklı şekilde seçilebilir.

Örnek

A kentinden B kentine 3 ve B kentinden C kentine 5 farklı yol vardır.

Buna göre, A kentinden C kentine; B kentine uğramak şartı ile kaç farklı yoldan gidilebilir?

Çözüm

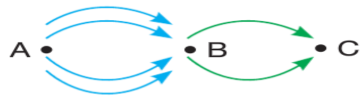


A dan B ye gitme olayı 3 farklı yolla gerçekleşebilir.

B den C ye gitme olayı 5 farklı yolla gerçekleşebilir.

Buna göre, A dan C ye, B kentine uğramak koşuluyla $3.5 = 15$ farklı yolla gidilebilir.

SORU:



A kentinden B kentine 4, B kentinden C kentine 2 farklı yolla gidilebilmektedir.

Buna göre, A dan C ye; B ye uğramak koşuluyla kaç farklı yoldan gidilebilir?

A dan B ye 4, B den C ye 2 farklı yoldan gidilebilir. O halde A dan C ye B ye uğrayarak

$4.2 = 8$

farklı yoldan gidilebilir.

SORU:

A kentinden B kentine 4, B kentinden C kentine 2 farklı yoldan gidilebilmektedir.

Buna göre, A kentinden C kentine; B kentine uğramak ve gidilen yolları dönüşte kullanmamak şartı ile kaç farklı yoldan gidilip gelinebilir?

A dan C ye $4.2 = 8$ farklı yoldan gidilebilir.

C den A ya $(2-1).(4-1) = 3$ farklı yoldan gidilebilir.

Gidiş – dönüş için $8.3 = 24$ farklı yol vardır.

Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A kümesinin elemanları kullanılarak

a. Üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

b. Üç basamaklı rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabilir?

c. Üç basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

d. Üç basamaklı rakamları farklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

Çözüm

a. Verilen kümenin 6 elemanı da her basamakta kullanılabilir. Buna göre,

Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.
6	6	6

$= 6^3 = 216$ tane sayı yazılabilir.

b. Rakamları farklı olması istendiğinden bir basamakta kullanılan sayı diğer basamakta kullanılamaz. Buna göre,

Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.
6	5	4

$= 120$ tane rakamları farklı doğal sayı yazılabilir.

c. Bir sayının çift sayı olabilmesi için birler basamağı çift olmalıdır.

Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.
6	6	3

{2, 4, 6}

$= 108$ sayı yazılabilir.

d. Rakamları farklı olması istendiğinden bir basamakta kullanılan sayı diğer basamakta kullanılamaz.

Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.
5	4	3

{2, 4, 6}

$= 60$ tane rakamları farklı çift sayı yazılabilir.

SORU:

$A = \{2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Yüzler	Onlar	Birler
4	4	4

$\Rightarrow 4.4.4 = 64$

{2,3,4,5}

SORU:

$A = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Yüzler	Onlar	Birler
6	5	4

$\Rightarrow 6.5.4 = 120$

(Bir basamakta kullanılan rakam başka basamakta kullanılmıyor.)

SORU:

$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı rakamları farklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

Yüzler	Onlar	Birler
4	3	4

$\Rightarrow 4.3.4 = 48$

{1, 3, 5, 7}

SORU:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı rakamları farklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

Yüzler	Onlar	Birler
6	5	4

$\Rightarrow 6.5.4 = 120$

{1, 3, 5, 7}

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

FAKTÖRİYEL

1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımı n! (n faktöriyel) ile gösterilir.

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1.2$

$3! = 1.2.3$

$\vdots$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

SORU:

8! sayısı 6! sayısının kaç katıdır?

$8! = 8.7.6!$ olarak açalım.

$8! = 6!.k \Rightarrow 8.7.\cancel{6!} = \cancel{6!}.k$

$\Rightarrow k = 56$

SORU:

$\dfrac{12! - 11!}{10! + 9!}$ işleminin sonucu kaçtır?

$12! = 12.11!$

$10! = 10.9!$

$$\frac{12! - 11!}{10! + 9!} = \frac{11!(12-1)}{9!(10+1)} = \frac{11.10.\cancel{9!}.\cancel{11}}{\cancel{9!}.\cancel{11}} = 110$$

SORU:

$(n + 3)! = 1$

olduğuna göre, n nin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

$0! = 1$ ya da $1! = 1$ dir.

$n + 3 = 0$, $n + 3 = 1$

$\Rightarrow n = -3$ $\Rightarrow n = -2$

$(-3) + (-2) = -5$

SORU:

$\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!} = 10$ olduğuna göre, n kaçtır?

$\dfrac{(n+3)\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}} = 10 \Rightarrow n+3 = 10$

$\Rightarrow n = 7$

PERMÜTASYON

n ve r birer doğal sayı ve $r \le n$ olmak üzere, n tane elemanın r li sıralanışına n nin r li permütasyonu denir ve $P(n, r)$ ile gösterilir.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(n, r) = \underbrace{n.(n-1).(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}_{r \text{ tane}}$$

Pratik yol : $P(7, 3) = \underbrace{7.6.5}_{3 \text{ tane}} = 210$

$P(6, 2) = \underbrace{6.5}_{2 \text{ tane}} = 30$

SORU:

$\dfrac{P(6,4)}{P(5,3)}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$\frac{P(6,4)}{P(5,3)} = \frac{6.5.4.3}{5.4.3} = 6$$

SORU:

$4.P(n,\ 3) = P(n+1,\ 3)$ eşitliğini sağlayan n değeri kaçtır?

$$4.\cancel{n}.\cancel{(n-1)}(n-2) = (n+1)\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}$$

$$\Rightarrow 4(n-2) = n+1$$

$$\Rightarrow 4n-8 = n+1$$

$$\Rightarrow n = 3$$

Örnek

5 kişi yan yana duran 3 sandalyeye kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm

I. yol

1. sandalye	2. sandalye	3. sandalye
5	4	3
↓	↓	↓
5 kişiden herhangi biri	Kalan 4 kişiden herhangi biri	Kalan 3 kişiden herhangi biri

$5.4.3 = 60$ farklı şekilde oturabilirler.

II. yol

Soruda 5 elemanın 3 yere sıralanması istenmiştir. Buna göre, $P(5,\ 3) = 5.4.3 = 60$ farklı biçimde oturabilirler.

SORU:

Örnek

Birbirinden farklı 4 fizik ve 3 kimya kitabı bir rafa

a. Kaç farklı şekilde dizilebilir?

b. Kimya kitapları bir arada olmak üzere, kaç farklı şekilde dizilebilir?

c. Aynı türden kitaplar bir arada olmak üzere, kaç farklı şekilde dizilebilir?

d. İki fizik kitabı arasında bir kimya kitabı olmak üzere, kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm

a. $4 + 3 = 7$ kitap rafa,

$P(7,\ 7) = 7!$ farklı şekilde dizilebilir.

b. $K_1K_2K_3$ F_1, F_2, F_3, F_4

Kimya kitapları yan yana dizileceğinden bunları bir eleman gibi almalıyız. 4 fizik kitabıyla toplam 5 eleman olur. 5 eleman $5!$ kadar farklı şekilde dizilir. Ayrıca kimya kitapları kendi aralarında $3!$ kadar farklı şekilde dizilirler. Buna göre, bu diziliş $5!.3!$ kadar farklı şekilde olur.

c. $K_1K_2K_3$ $F_1F_2F_3F_4$

Aynı türden kitaplar birer kitap gibi düşünülürse $2!$ kadar farklı şekilde dizilirler. Kimya kitapları kendi aralarında $3!$, fizik kitapları kendi aralarında $4!$ kadar farklı şekilde dizilirler. Buna göre, tüm dizilişlerin sayısı

$2!.3!.4!$ olur.

d. $F_1\ K_1\ F_2\ K_2\ F_3\ K_3\ F_4$

Diziliş yukarıdaki gibi olacağından fizik kitapları kendi aralarında $4!$, kimya kitapları kendi aralarında $3!$ kadar farklı şekilde dizilebilirler.

Buna göre, tüm dizilişlerin sayısı $4!.3!$ olur.

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

SORU:

4 kız ve 5 erkek öğrenci düz bir sıra boyunca kızlar yan yana olmak şartı ile kaç farklı şekilde sıralanır?

$\boxed{KKKK}$ EEEEE

$6!.4!$

SORU:

Birbirinden farklı 4 matematik ve 3 biyoloji kitabı düz bir rafa matematik kitapları bir arada olmak koşulu ile kaç farklı şekilde sıralanabilir?

$\boxed{MMMM}$ BBB

$4!.4!$

SORU:

2 farklı matematik ve 3 farklı fizik kitabı düz bir rafa fizik kitapları başta olacak şekilde kaç farklı biçimde dizilebilir?

$\boxed{FFF}$ MM

$3!.2! = 12$

SORU:

"MİLAS" kelimesinin harfleri kullanılarak elde edilen anlamlı ya da anlamsız 5 harfli kelimelerin kaç tanesi A ile başlar, S ile biter?

A __ __ __ S MİL~~AS~~

$1 . 3 . 2 . 1 . 1 = 6$

TEKRARLI PERMÜTASYON

Genel olarak sıralanmış n tane elemanın n_1 tanesi birinci türden, n_2 tanesi ikinci türden, ... , n_r tanesi r. türden ve $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ ise bu n elemanın yerlerinin değiştirilmesiyle oluşan farklı sıralamaların sayısı,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!\ldots(n_r)!} \text{ tanedir.}$$

Örnek

AKARSULAR kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız dokuz harfli

a. Kaç farklı kelime yazılabilir?

b. R ile başlayıp K ile biten kaç farklı kelime yazılabilir?

Çözüm

a) AKARSULAR kelimesindeki harfler

$\underbrace{A, A, A}_{3 \text{ tane}}$, $\underbrace{R, R}_{2 \text{ tane}}$, $\underbrace{K}_{1 \text{tane}}$, $\underbrace{S}_{1 \text{tane}}$, $\underbrace{U}_{1 \text{tane}}$, $\underbrace{L}_{1 \text{tane}}$

Toplam harf sayısı

$$\frac{9!}{3!.2!.1!.1!.1!.1!} = \frac{9!}{3!.2!}$$

Tekrar eden harf sayıları

kadar farklı kelime yazılabilir.

b) $\underline{R}$ $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}$ $\underline{K}$

Buraya geri kalan harfler sıralanır.
A, A, A, R, S, L, U

Geriye kalan 7 harf kullanılarak

$$\frac{7!}{3!.1!.1!.1!.1!} = \frac{7!}{3!}$$ kadar farklı sözcük yazılabilir.

SORU:

Özdeş 4 sarı ve özdeş 5 kırmızı boncuk düz bir ipe kaç farklı şekilde dizilebilir?

$S \to 4$

$K \to 5$ $\quad 4 + 5 = 9$

$$\frac{9!}{4!.5!} = \frac{9.8.7.6.\cancel{5!}}{4.3.2.1.\cancel{5!}}$$

$$= 126$$

SORU:

"BERABER" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı veya anlamsız yedi harfli kaç farklı kelime yazılabilir?

$B \to 2$

$E \to 2$ $\quad \dfrac{7!}{2!.2!.2!} = 630$

$R \to 2$

SORU:

"1114164" sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek birbirinden farklı yedi basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

$1 \to 4$

$4 \to 2$

$$\frac{7!}{4!.2!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{2.\cancel{4!}} = 105$$

SORU:

"KELEBEK" kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek yedi harfli ve E harfi ile başlayan anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

K~~E~~LEBEK $\quad$ E __ __ __ __ __ __

$E \to 2$

$K \to 2$ $\quad \dfrac{6!}{2!.2!} = 180$

Örnek

33300551 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek sekiz basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm

Verilen rakamlar kullanılarak sekiz basamaklı sayılar yazabilmemiz için sıfır başa gelmemelidir.

$$\underbrace{\frac{8!}{3!.2!.2!}}_{\text{Tüm durumlar}} - \underbrace{\frac{7!}{3!.2!}}_{\text{Sıfırın başa gelme durumu}} = \frac{8.7.\cancel{6}.5.\cancel{4}.3.2}{\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}} - \frac{7.\cancel{6}.5.4.3.\cancel{2}}{\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{2}}$$

$$= 1680 - 420$$

$$= 1260 \text{ olur.}$$

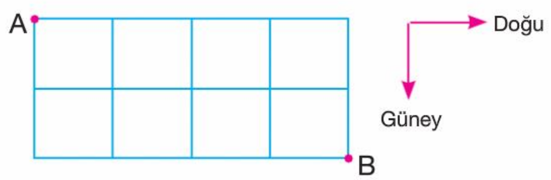
SORU:

23023 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek beş basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

$$\frac{5!}{2!.2!} - \frac{4!}{2!.2!} = 30 - 6$$

$$= 24$$

Örnek - 1



Yukarıdaki şekilde birbirini dik kesen sokaklar gösterilmiştir.

A dan hareket edip B noktasına <u>en kısa</u> yoldan gidecek olan bir kişi kaç farklı yol izleyebilir?

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

Çözüm

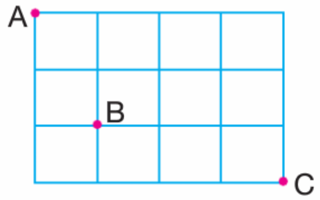
A dan B ye en kısa yoldan gidecek bir kişi 2 sokak güneye **(G)** ve 4 sokak doğuya **(D)** gitmelidir.

GGDDDD, **GDDDDG**, ... , **GDGDDD**

gibi durumlar vardır. Buna göre,

$\frac{6!}{2!.4!} = 15$ farklı yolla gidebilir.

Örnek - 2



Yandaki şekilde birbirini dik kesen sokaklar gösterilmiştir.

A dan hareket edip B ye uğrayarak C noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kişi kaç farklı yol izleyebilir?

Çözüm

A dan C ye en kısa yoldan gitmek isteyen bir kişi önce A dan B ye en kısa yoldan, daha sonra B den C ye en kısa yoldan gitmelidir.

A dan B ye en kısa yoldan gidecek olan bir kişi; 1 sokak doğuya **(D)** 2 sokak güneye **(G)** gitmelidir.

Buna göre, A dan B ye

$\frac{3!}{1!.2!} = 3$ farklı yolla gidebilir. ... **(I)**

B den C ye en kısa yoldan gidecek olan bir kişi; 3 sokak doğuya **(D)** ve 1 sokak güneye **(G)** gitmelidir.

Buna göre, B den C ye

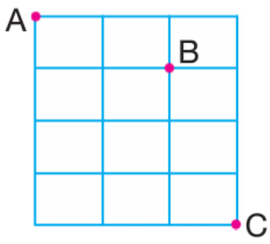
$\frac{4!}{3!.1!} = 4$ farklı yolla gidilebilir. ... **(II)**

Çarpma yoluyla sayma kuralına göre, A dan hareket edip B ye uğrayarak C noktasına gidecek olan bir kişi;

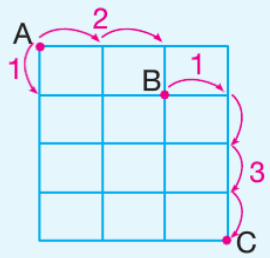
(I) . (II)

$\frac{3!}{1!.2!} \cdot \frac{4!}{3!.1!} = 3.4 = 12$ farklı yol izleyebilir.

SORU:



Yandaki şekilde A dan C ye, B noktasına uğramak koşulu ile en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?



$2 + 1 = 3$ $\qquad$ $3 + 1 = 4$

$\frac{3!}{2!} = 3$ $\qquad$ $\frac{4!}{3!} = 4$

$\Rightarrow 3.4 = 12$

KOMBİNASYON

➢ $n, r \in N$ ve $r \le n$ olmak üzere, n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt kümelerinden her birine A kümesinin r li kombinasyonu denir.

➢ r li kombinasyonların sayısı

$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ dir.

KOMBİNASYON : SEÇMEK

PERMÜTASYON : SEÇMEK + SIRALAMAK

Örnek – 1

A = {1, 2, 3} kümesinin 2 elemanlı kombinasyonlarını ve 2 elemanlı permütasyonlarını yazınız.

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

Çözüm – 1

A = {1, 2, 3} kümesinin 2 li kombinasyonları ve 2 li permütasyonları aşağıdaki gibidir,

2 li Kombinasyonları	2 li Permütasyonları	
{1, 2}	1, 2	2, 1
{1, 3}	1, 3	3, 1
{2, 3}	2, 3	3, 2
3 tane	**6 tane**	

Örnek – 2

5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kombinasyonlarının sayısı kaçtır?

Çözüm – 2

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2!}$$

$= 10$ olur.

SORU:

7 elemanlı bir kümenin 4 elemanlı kombinasyonlarının sayısı kaçtır?

$$\binom{7}{4} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3!} = 35$$

SORU:

10 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kombinasyonlarının sayısı kaçtır?

$$\binom{10}{3} = \frac{10.9.8.7!}{7!.3!} = 120$$

SORU:

$$2.\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{2}$$

olduğuna göre, n kaçtır?

$$2.\frac{(n+1)!}{1!.n!} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!.2!}$$

$$2.\cancel{(n+1)} = \frac{\cancel{(n+1)}(n)}{2}$$

$\Rightarrow$ $n = 4$

SORU:

$$C(n, 1) + C(n, 2) = 28$$

olduğuna göre, n kaçtır?

$$\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!.2!} = 28$$

$$n + \frac{n.(n-1)}{2} = 28$$

$\Rightarrow$ $n = 7$

--Kombinasyonun Özellikleri—

1. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ 2. $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$

3. $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ ise $a = b$ veya $n = a + b$

4. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Örnek

$$\binom{n}{8-n} = \binom{n}{4}$$

olduğuna göre, n nin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm

$$\binom{n}{8-n} = \binom{n}{4}$$

$\Rightarrow 8 - n = 4$ veya $n = 8 - n + 4$

$\Rightarrow n = 4$ veya $2n = 12$

$n = 6$ olur.

$4 + 6 = 10$ olur.

SORU:

$$\binom{n}{6} = \binom{n}{7}$$

olduğuna göre, n kaçtır?

$n = 6 + 7$

$\Rightarrow n = 13$

SORU:

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, n) = 15$$

olduğuna göre, n kaçtır?

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$

$1 + n + 1 = 15 \Rightarrow n = 13$

SORU:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{5}$$

toplamının değeri kaçtır?

$\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$

$1 + 5 + 1 = 7$

Özellik-5

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

Örnek – 1

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{6}$$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r} \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\underbrace{\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{6}{3}+\binom{6}{4}}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{7}{4}+\binom{7}{5}}=\binom{8}{5}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{8}{5}+\binom{8}{6}}$$

$$\Rightarrow \binom{9}{6} \text{ olur.}$$

Özellik-6

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

Örnek – 2

$$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\ldots+\binom{9}{9}$$

toplamı kaçtır?

Çözüm

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\ldots+\binom{9}{9}=A$$

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\underbrace{\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\ldots+\binom{9}{9}}_{A}=2^9$$

$$\Rightarrow \binom{9}{0}+\binom{9}{1}+A=2^9$$

$$\Rightarrow 1+9+A=512$$

$$\Rightarrow A=502 \text{ olur.}$$

SORU:

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{5}{4}+\binom{6}{5}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\binom{6}{3}$ B) $\binom{6}{4}$ C) $\binom{6}{5}$ D) $\binom{7}{4}$ E) $\binom{7}{5}$

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$$

$$\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4}$$

$$\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=\binom{7}{5}$$

SORU:

Bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 2 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olduğuna göre, bu küme kaç elemanlıdır?

Eleman sayısı n olsun.

$$\binom{n}{3}=\binom{n}{2} \Rightarrow n=2+3$$

$$\Rightarrow n=5$$

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

SORU:

5 elemanlı bir kümenin en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

$$\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$$

$$10 + 5 + 1 = 16$$

SORU:

4 elemanlı bir kümenin en çok 1 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{0}=4+1$$

$$=5$$

Örnek

$A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$

kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde e elemanı bulunur b elemanı bulunmaz?

Çözüm

4 elemanlı alt kümeleri oluşturmak için A kümesinden b elemanını atalım ve e elemanını ise 4 elemanlı alt kümelerinin içine yerleştirelim. Bu durumda, A kümesi $\{a, c, d, f, g\}$ kümesine ve istenilen kümenin eleman ihtiyacı 3 e düşecektir.

Bu durumda, istenilen çözüm 5 elemanlı olan $\{a, c, d, f, g\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısıdır.

$$\binom{5}{3}=\frac{5.4.3!}{2!.3!}=10 \text{ olur.}$$

SORU:

$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde g veya h elemanları bulunmaz?

a, b, c, d, e, f, $\cancel{g}$, $\cancel{h}$

$$\binom{6}{4}=15$$

SORU:

$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 elemanı bulunmaz, 6 elemanı bulunur?

0, 1, $\cancel{2}$, 3, 4, 5, $\cancel{6}$, 7 $\{\underline{6}, \_\_, \_\_, \_\_\}$

$$\binom{6}{3}=20$$

Örnek

5 kız ve 4 erkek öğrenci arasından 3 ü kız, 2 si erkek olmak üzere, 5 kişilik kaç farklı grup oluşturulabilir?

Çözüm

5 kız öğrenci arasından 3 ü $\binom{5}{3}$

4 erkek öğrenci arasından 2 si $\binom{4}{2}$ kadar farklı şekilde seçilir. Buna göre,

$$=\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{2}$$

$$=\frac{5.4.3}{3.2.1}\cdot\frac{4.3}{2.1}$$

$$=10.6$$

$= 60$ farklı grup oluşturulabilir.

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

SORU:

8 öğrenci arasından 4 öğrenci kaç farklı şekilde seçilebilir?

$$\binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 70$$

SORU:

4 doktor ve 5 hemşire arasından 2 doktor ve 2 hemşireden oluşan 4 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde seçilebilir?

$$\left.\begin{matrix} DDDD \\ HHHHH \end{matrix}\right\} DDHH$$

$$\binom{4}{2}.\binom{5}{2} = 6.10$$
$$= 60$$

SORU:

10 kişilik bir sporcu grubundan 6 kişilik bir basketbol takımına girecek 3 kişi belli ise takım kaç farklı şekilde seçilebilir?

__ __ __ __ __ __

$10 - 3 = 7$

$$\binom{7}{3} = 35$$

Örnek

4 erkek ve 5 kız arasından

a. En az biri erkek olan 3 kişilik kaç farklı komisyon kurulabilir?

b. En çok bir kız bulunan 3 kişilik kaç farklı komisyon kurulabilir?

Çözüm

a) I. yol

En az birinin erkek olması istendiğinden 3 kişilik komisyonda 1 erkek, 2 erkek veya 3 erkek olmalıdır. Buna göre, komisyonlar aşağıdaki gibi olur.

EKK + EEK + EEE

$$\binom{4}{1}.\binom{5}{2} + \binom{4}{2}.\binom{5}{1} + \binom{4}{3}$$

$$= \frac{4}{1}\cdot\frac{5.4}{2.1} + \frac{4.3}{2.1}\cdot\frac{5}{1} + \frac{4.3.2}{3.2.1} = 74 \text{ olur.}$$

II. yol

3 kişilik grupta en az bir erkek olması istendiğinden, 3 kişilik tüm komisyon sayısından hiç erkek bulunmayan 3 kişilik komisyonların sayısını çıkardığımızda, içinde en az bir erkek olan 3 kişilik komisyonların sayısını buluruz.

4E + **5K** = 9 kişi

$$\underbrace{\binom{9}{3}}_{\text{Tümü}} - \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{Sadece kızlar}} = \frac{9.8.7}{3.2.1} - \frac{5.4.3}{3.2.1} = 84 - 10 = 74 \text{ olur.}$$

b. En çok bir kız bulunan 3 kişilik komisyonda ya hiç kız olmayacak ya da sadece bir kız olacaktır.

Buna göre,

EEE + KEE

$$\binom{4}{3} + \binom{5}{1}.\binom{4}{2}$$

$$= \frac{4.3.2}{3.2.1} + \frac{5}{1}\cdot\frac{4.3}{2.1} = 4 + 30 = 34 \text{ olur.}$$

SORU:

3 doktor ve 4 hemşire arasından 3 kişilik bir ekip Van'a gönderilecektir. En çok bir hemşire bulunan kaç farklı ekip kurulabilir?

$$\left.\begin{matrix} DDD \\ HHHH \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \underline{H}\ \underline{D}\ \underline{D} & \binom{4}{1}\binom{3}{2} = 12 \\ \underline{D}\ \underline{D}\ \underline{D} & \binom{3}{3} = 1 \end{matrix}$$

$12 + 1 = 13$

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

Örnek

Bir öğrenci bir sınavda yer alan 10 sorudan 7 sini cevaplamak zorundadır.

a. Öğrenci cevaplayacağı soruları kaç farklı şekilde seçebilir?

b. İlk 4 sorudan sadece 3 ünü cevaplamak şartıyla cevaplayacağı soruları kaç farklı şekilde seçebilir?

Çözüm

a) $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!.3!} = \frac{10.\cancel{9}^{3}.\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 120$ farklı şekilde seçebilir.

b) $\underbrace{S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4}_{\text{İlk 4 sorudan 3 ünü}} \quad \underbrace{S_5 \quad S_6 \quad S_7 \quad S_8 \quad S_9 \quad S_{10}}_{\text{Toplam 7 soru cevaplaması için geriye kalan sorulardan, 4 ünü seçmeli}}$

$= \binom{4}{3}.\binom{6}{4}$

$= \frac{4.3.2}{3.2.1}\cdot\frac{6.5.4.3}{4.3.2.1} = 4.15 = 60$ farklı şekilde seçebilir.

SORU:

Kübra belirlediği 6 kurstan 4 tanesine gitmek istiyor. Bu kurslardan 2 tanesi aynı saate denk geldiğine göre, Kübra kaç farklı seçim yapabilir?

$K_1 \quad K_3 \quad K_4 \quad K_5 \quad K_6$
K_2

$\binom{4}{4}+\binom{2}{1}.\binom{4}{3} = 1+8$
$= 9$

NOT:

➢ Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan n tane noktadan en çok $\binom{n}{2}$ tane doğru geçer.

➢ Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan n tane nokta ile en çok $\binom{n}{3}$ tane üçgen çizilir.

Örnek

Herhangi üçü doğrusal olmayan 7 nokta ile

a. En fazla kaç doğru oluşturulur?

b. Köşeleri bu noktalardan seçilen en fazla kaç üçgen oluşturulur?

Çözüm

a) $\binom{7}{2} = \frac{7.6}{2.1} = 21$ tane doğru oluşur.

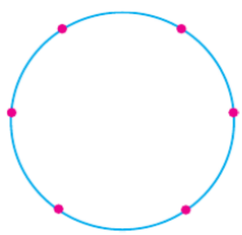
b) $\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$ tane üçgen oluşur.

SORU:

Bir çember üzerindeki 5 nokta kullanılarak köşeleri bu noktalar olan kaç farklı çokgen oluşturulabilir?

Üçgen		Dörtgen		Beşgen
$\binom{5}{3}$	+	$\binom{5}{4}$	+	$\binom{5}{5} = 10+5+1 = 16$

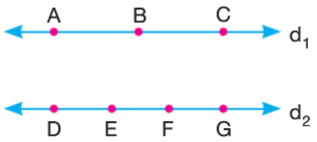
SORU:



Şekilde verilen çember üzerindeki 6 nokta ile en çok kaç farklı doğru çizilir?

$\binom{6}{2} = \frac{6.5}{2.1} = 15$

Örnek



$d_1 // d_2$

a. Şekildeki 7 noktadan en çok kaç doğru geçer?

b. Şekildeki 7 nokta ile köşeleri bu noktalar olan en çok kaç üçgen oluşturulabilir?

Çözüm

a. $\underset{\substack{\text{doğrusu}\\ \text{üzerinde}\\ \text{herhangi}\\ \text{bir nokta}}}{d_1 + d_2 + d_1}$ • $\underset{\substack{\text{doğrusu}\\ \text{üzerinde}\\ \text{herhangi}\\ \text{bir nokta}}}{d_2}$

$$1 + 1 + \binom{3}{1}.\binom{4}{1}$$

$= 2 + 12 = 14$ tane farklı doğru geçer.

b. I. Yol:

Üçgen oluşturmak için d_1 üzerinde bir nokta ile d_2 üzerinde iki nokta veya d_1 üzerinde iki nokta ile d_2 üzerinde bir nokta seçilmelidir.

$$\begin{pmatrix} d_1 \text{ de } 1 \text{ nokta} \\ d_2 \text{ de } 2 \text{ nokta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \text{ de } 2 \text{ nokta} \\ d_2 \text{ de } 1 \text{ nokta} \end{pmatrix}$$

$$\binom{3}{1}.\binom{4}{2} \quad + \quad \binom{3}{2}.\binom{4}{1}$$

$$= \frac{3}{1} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}.3}{\cancel{2}.1} + \frac{3.2}{2.1} \cdot \frac{4}{1}$$

$= 18 + 12 = 30$ üçgen oluşturulabilir.

II. Yol:

$$\underbrace{\binom{7}{3}}_{\substack{\text{Tüm}\\ \text{durum}}} - \underbrace{\binom{3}{3}}_{\substack{\text{Doğrusal}\\ \text{olanlar}\\ \text{üçgen}\\ \text{oluşturmaz}}} - \underbrace{\binom{4}{3}}_{\substack{\text{Doğrusal}\\ \text{olanlar}\\ \text{üçgen}\\ \text{oluşturmaz}}} = 35 - 1 - 4 = 30 \text{ bulunur.}$$

SORU:

$d_1 // d_2$ olmak üzere,

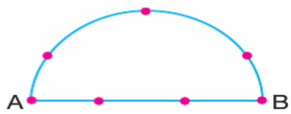
Şekildeki 6 noktadan en çok kaç doğru geçer?

$d_1 \quad d_2$

$$\binom{2}{1}.\binom{4}{1} = 2.4 = 8$$

$8 + 1 + 1 = 10$

SORU:

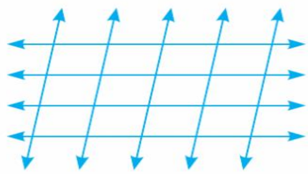


Şekildeki yarım çember üzerindeki 7 noktadan en çok kaç doğru geçer?

$$\binom{7}{2} - \binom{4}{2} + 1 = 16$$

Örnek

Birbirine paralel 5 doğru ile bu doğruları kesen ve birbirine paralel 4 doğru veriliyor.



Buna göre, bu doğrular arasında kaç tane paralelkenar vardır?

Çözüm

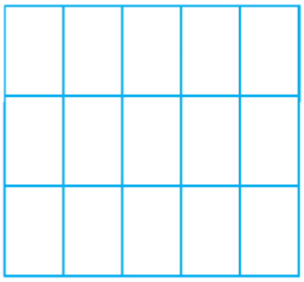
Seçilen bir paralelkenarın karşılıklı iki kenarı birbirine paralel düşey 5 doğru üzerinde, diğer kenarları ise birbirine paralel yatay 4 doğru üzerindedir.

Buna göre, $\binom{5}{2}.\binom{4}{2} = \frac{5.4}{2.1} \cdot \frac{4.3}{2.1}$

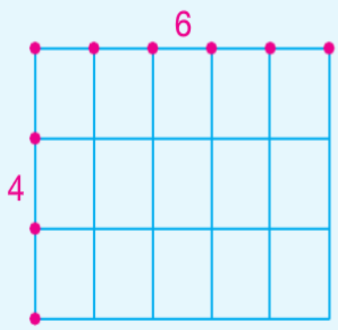
$= 10.6$

$= 60$ tane paralelkenar vardır.

SORU:

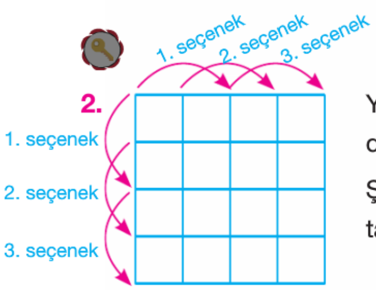


Şekilde yatay doğrular düşey doğrulara diktir. Şekilde kaç tane dikdörtgen vardır?



$$\binom{6}{2}.\binom{4}{2} = 15.6$$
$$= 90$$

SORU:



Yandaki şekil birim karelerden oluşmuştur.

Şekilde alanı 4 br^2 olan kaç tane kare vardır?

Alanının 4 br^2 olabilmesi için bir kenar uzunluğunun 2 br olması gerekiyor.

Düşeyde seçilebilecek 3 seçenek vardır. $\binom{3}{1}$

Yatayda seçilebilecek 3 seçenek vardır. $\binom{3}{1}$

Toplamda $\binom{3}{1}.\binom{3}{1} = 3.3 = 9$ tane alanı 4 br^2 olan kare vardır.

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

PASCAL ÜÇGENİ VE BİNOM

İki Terimli Binom	Açılım	Pascal Üçgeni
$(x \pm y)^0$	$\binom{0}{0}$	1
$(x \pm y)^1$	$\binom{1}{0}x \pm \binom{1}{1}y$	1 1
$(x \pm y)^2$	$\binom{2}{0}x^2 \pm \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$	1 2 1
$(x \pm y)^3$	$\binom{3}{0}x^3 \pm \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 \pm \binom{3}{3}y^3$	1 3 3 1
$(x \pm y)^4$	$\binom{4}{0}x^4 \pm \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 \pm \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$	1 4 6 4 1
$(x \pm y)^5$	$\binom{5}{0}x^5 \pm \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 \pm \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 \pm \binom{5}{5}y^5$	1 5 10 10 5 1
$(x \pm y)^6$	$\binom{6}{0}x^6 \pm \binom{6}{1}x^5y + \binom{6}{2}x^4y^2 \pm \binom{6}{3}x^3y^3 + \binom{6}{4}x^2y^4 \pm \binom{6}{5}xy^5 + \binom{6}{6}y^6$	1 6 15 20 15 6 1
...	...	...

Binom Açılımının Özellikleri

1. Pascal üçgeninde her satırın ilk ve son sayıları 1 dir.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}.x^{n-1}.y + \binom{n}{2}.x^{n-2}.y^2 + \binom{n}{3}.x^{n-3}.y^3 + \ldots + \binom{n}{r}.x^{n-r}.y^r + \ldots + \binom{n}{n}.y^n$$

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}.x^{n-1}.y + \binom{n}{2}.x^{n-2}.y^2 - \binom{n}{3}.x^{n-3}.y^3 + \ldots + (-1)^r\binom{n}{r}.x^{n-r}.y^r + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}.y^n$$

özdeşlikleri sağlanır.

3. $n \in \mathbb{N}$ için $(x \pm y)^n$ açılımında $n+1$ tane terim vardır.

4. $(x-y)^n$ açılımındaki katsayıların işaretleri $+, -, +, -, \ldots$ şeklindedir.

5. $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ katsayılarına binom katsayıları denir.

NOT:

a, b gerçek sayılar ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}.b^1 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

ifadesine binom açılımı,

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ sayılarına ise

binom katsayıları denir.

Örnek – 1

$(2a-3b)^3$ ifadesinin açılımını yapınız.

Çözüm

$(2a-3b)^3$

$$= \binom{3}{0}.(2a)^3 + \binom{3}{1}.(2a)^2.(-3b)^1 + \binom{3}{2}.(2a)^1.(-3b)^2 + \binom{3}{3}.(-3b)^3$$

$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$ olur.

NOT:

$(x+y)^n$ açılımında

i) $n+1$ tane terim vardır.

ii) $x=y=1$ alınarak katsayıları toplamı bulunur.

iii) $x=y=0$ için sabit terim bulunur.

Örnek – 2

$(2a-3b)^n$

ifadesinin açılımında 7 terim bulunduğuna göre, bu terimlerin katsayıları toplamı kaçtır?

Çözüm

$(2a-3b)^n$ ifadesinin açılımında 7 terim bulunduğuna göre,

$n+1=7$ dir. Buna göre, $n=6$ olur.

$(2a-3b)^6$ terimlerinin katsayıları toplamı

$a=b=1$ için bulunur.

Buna göre, $(2.1-3.1)^6 = (2-3)^6 = 1$ olur.

SORU:

$(3x+y)^5$ ifadesinin açılımının terim sayısı kaçtır?

$n=5$

terim sayısı $n+1 \Rightarrow 5+1=6$

SORU:

$(2x-y)^3$ ifadesinin açılımını yapınız.

$$\binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2.(-y) + \binom{3}{2}(2x).(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3$$

$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

NOT:

$(x+y)^n$ açılımında baştan $(r+1)$. terim $\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$ dir.

Örnek – 1

$$(2x-3y)^6$$

ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan 4. terimini bulunuz.

Çözüm

$r+1=4 \Rightarrow r=3$ olur.

$$(2x-3y)^6=\binom{6}{3}.(2x)^{6-3}(-3y)^3$$

$=20.(2x)^3.(-3y)^3$

$=20.2^3.x^3.(-3)^3.y^3$

$=20.8.x^3.(-27).y^3$

$=-4320.x^3y^3$ olur.

NOT:

Ortadaki terim bulunurken $r=\dfrac{n}{2}$ alınır.

Örnek – 2

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$$

ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki ortadaki terimini bulunuz.

Çözüm

$n=6 \Rightarrow r=\dfrac{6}{2}=3$ olur.

Buna göre, ortadaki terim $\binom{6}{3}.(x^2)^{6-3}.\left(-\dfrac{1}{x}\right)^3$

$=20.(x^2)^3.(-x^{-1})^3$

$=20.x^6.-x^{-3}$

$=-20.x^3$ olur.

SORU:

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^7$$

ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan 3. terimini bulunuz.

$(r+1)=3 \Rightarrow r=2$

$\binom{7}{2}.(x^2)^{7-2}.\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2=21.x^{10}.\dfrac{1}{x^2}$

$=21x^8$

OLASILIK

Olasılık ile İlgili Temel Kavramlar - I

➢ Yeni bilgi kazanmak ve olayların gelişimini incele mek için yapılan deneme ve testlere deney de nir.

Örneğin, zarın veya paranın havaya atılması, tor badan bir top çekilmesi birer deneydir.

➢ Bir deneyin mümkün olan her türlü sonucun çıktı denir.

Bir madeni paranın yazı - tura için havaya atılma sı bir deney;

"*paranın yazı gelmesi*" ve "*paranın tura gelme si*" *bu deneyin çıktılarıdır.*

➢ Bir deneyin mümkün olan tüm çıktılarının kümesine örnek uzay denir ve E ile gösterilir.

Örnek uzayın her elemanına örnek nokta denir.

Bir zarın atılması deneyinde

örnek uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

örnek noktalar 1, 2, 3, 4, 5, 6 olur.

İki madeni paranın atılması deneyinde,

örnek uzay $E = \{(T, T), (T, Y), (Y, Y), (Y, T)\}$

örnek noktalar (T, T), (T, Y), (Y, Y), (Y, T) dır.

➢ Bir örnek uzayın her alt kümesine olay denir.

Bir zar atılması deneyinde örnek uzayın alt kümesi olan bazı olaylar aşağıdaki gibidir.

i) Çift sayı gelmesi olayı $\{2, 4, 6\}$

ii) Tek sayı gelmesi olayı $\{1, 3, 5\}$

iii) Asal sayı gelmesi olayı $\{2, 3, 5\}$

iv) 4 ten büyük sayı gelmesi olayı $\{5, 6\}$

➢ Boş kümeyle gösterilen olaya imkansız olay denir.

Bir zarın atılması deneyinde, zarın üst yüzüne 8 gelmesi imkansız olaydır.

➢ E örnek uzayına kesin olay denir.

Bir paranın atılması deneyinde yazı veya tura gelmesi kesin olaydır.

➢ A ve B olayları, E evrensel kümesine ait iki olay olsun. $A \cap B = \varnothing$ ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir.

Bir zarın atılması deneyinde, zarın üst yüzüne; tek sayı gelmesi olayı A, çift sayı gelmesi olayı B olsun.

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B = \varnothing$ olur.

➢ A ve B olayları, E evrensel kümesine ait iki olay olsun. $A \cap B \neq \varnothing$ ise A ve B olaylarına ayrık olmayan olaylar denir.

Bir zarın atılması deneyinde, zarın üst yüzüne tek sayı gelmesi olayı A, asal sayı gelme olayı B olsun.

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{2, 3, 5\}$

$A \cap B = \{3, 5\} \neq \varnothing$ olur.

➢ Her bir çıktının olma olasılığı eşit ise bu olaylara eş olası olay denir.

➢ Çıktılardan en az birinin olma olasılığının diğerlerinden farklı olduğu olaylara eş olası olmayan olay denir.

Örnek - 1

İki zarın atılması deneyindeki örnek uzayı ve aşağıda istenilen olayları yazınız.

a) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 11 olması olayı

b) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının en çok 3 olması olayı

c) Zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının 10 olması olayı

d) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 13 olması olayı

e) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 1 den büyük 13 ten küçük olması olayı

a) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 11 olması,

$A = \{(5, 6), (6, 5)\}$

b) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının en çok 3 olması,

$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

c) Zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının 10 olması,

$C = \{(2, 5), (5, 2)\}$

d) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 13 olması,

$D = \varnothing$ (İmkansız Olay)

e) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 1 den büyük 13 ten küçük olması,

$E =$ (Kesin Olay)

Örnek - 2

Üç madeni paranın arka arkaya (veya üç madeni paranın aynı anda) havaya atılması deneyinin örnek uzayını yazınız.

Çözüm

E = {YYY, YYT, YTT, YTY, TTT, TTY, TYT, TYY}

Art arda yapılan madeni para atma deneyinde, para n kez atıldığında (n tane madeni paranın havaya atılması deneyinde) örnek uzayın eleman sayısı 2^n olur.

SORU:

İki madeni paranın atılması deneyinde oluşan örnek uzayı yazınız.

1. Para	2. Para
Yazı	Yazı
Yazı	Tura
Tura	Yazı
Tura	Tura

NOT:

Bir E örnek uzayında tanımlı tüm olayların kümesi E_A olsun.

$P : E_A \rightarrow [0, 1]$

biçiminde tanımlı P fonksiyonuna olasılık fonksiyonu denir. $P(A)$ değerine A olayının olma olasılığı, $P(A')$ değerine A olayının olmama olasılığı denir.

Bir deney sonucunda elde edilen olayların kesişimi boş küme ve birleşimi de örnek uzayı oluşturuyorsa bu iki olaya tümleyen olaylar denir.

Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri

1. $A \subset E_A$ için $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\varnothing) = 0$, $P(E) = 1$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A) + P(A') = 1$
5. A ve B, E_A nın iki ayrık olayı ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Örnek

A ve B, E örnek uzayında tanımlı iki olay olmak üzere,

$$P(A') = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

olduğuna göre, $P(A \cup B)$ kaçtır?

Çözüm

$$P(A') = \frac{1}{4} \qquad P(A) + P(A') = 1$$

$$\Rightarrow P(A) + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{11}{12} \quad \text{olur.}$$

SORU:

E örnek uzayında $A \subset E$ dir.

$P(A) = \frac{3}{7}$ olduğuna göre, $P(A')$ kaçtır?

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$\frac{3}{7} + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = \frac{4}{7}$$

NOT:

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun.

$P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n)$ ise, E örnek uzayına "eş olumlu örnek uzay" denir.

E, eş olumlu örnek uzay ve $A \subset E$ olsun.

$s(A)$: A olayının eleman sayısı

$s(E)$: E örnek uzayının eleman sayısı

$P(A)$: A olayının olma olasılığı

olmak üzere,

$$P(A) = \frac{s(A) \rightarrow \text{istenen olay}}{s(E) \rightarrow \text{tüm durumlar}}$$

Örnek

Bir madeni paranın arka arkaya üç kez atılması sonucu en az iki kez tura gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

Örnek uzay

$E = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TTT, TTY, TYY, TYT\}$

olup $s(E) = 8$ dir.

İstenen olay;

$A = \{TTT, TTY, YTT, TYT\}$ olup $s(A) = 4$ tür.

Buna göre,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{olur.}$$

SORU:

Bir madeni para iki kez üst üste atıldığında en az birinde tura gelme olasılığı kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l} TT \\ TY \\ YT \\ YY \end{array}\right\} 4 \qquad \left.\begin{array}{l} TY \\ YT \\ TT \end{array}\right\} 3 \qquad P(A) = \frac{3}{4}$$

SORU:

Bir madeni para art arda iki kez atıldığında birincisinde tura, ikincisinde yazı gelme olasılığı kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l} TT \\ TY \\ YT \\ YY \end{array}\right\} 4 \qquad TY\}1 \qquad P(A) = \frac{1}{4}$$

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK

Örnek

Bir çift zar atılıyor. Zarlar üzerindeki sayıların

a) toplamının 8 olma olasılığı kaçtır?

b) toplamının en çok 10 olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

Bir çift zar atıldığında örnek uzay 36 elemanlıdır.

$s(E) = 36$

a) A, üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olma olayı olsun.

$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$s(A) = 5$

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{5}{36}$ olur.

b) B, üst yüze gelen sayıların toplamı en çok 10 olma olayı olsun.

Buna göre, $B' = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ olur.

$P(B) + P(B') = 1 \Rightarrow P(B) + \frac{3}{36} = 1$

$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{12} \Rightarrow P(B) = \frac{11}{12}$ olur.

SORU:

Bir çift zar atılıyor. Zarların üzerindeki sayıların toplamlarının 10 olma olasılığı kaçtır?

$6^2 = 36 \ldots s(E) = 36$

$(4, 6)\ (5, 5)\ (6, 4) \ldots s(A) = 3$

$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

SORU:

Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların ikisinin de asal sayı olma olasılığı kaçtır?

$6^2 = 36 \ldots s(E) = 36$

$(2, 2)\ (3, 2)\ (5, 2)$

$(2, 3)\ (3, 3)\ (5, 3) \ldots s(A) = 9$

$(2, 5)\ (3, 5)\ (5, 5)$

$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

MATEMATİK ÖĞRETMENİ CÜNEYT TOPRAK